

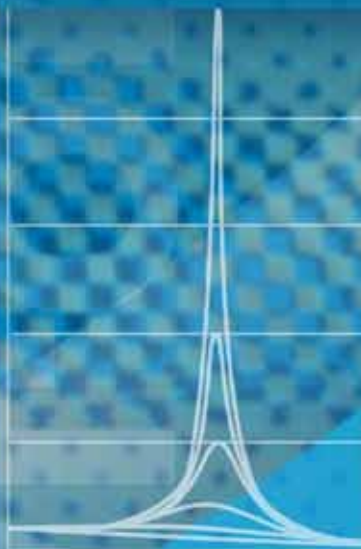


Forfatter: Carl Martin Larsen



# Krefter og bevegelser for marine konstruksjoner

Havromsteknologi



## Innhold

Repetisjon fra fysikken.....	2
Frie svingninger uten demping.....	4
Deformasjon og fjærstivhet. Statisk system.....	4
Dynamisk system.....	5
Periodisk svingning. Svingeligningen.....	6
Eksempler.....	7
Frie svingninger med demping.....	8
Depingskraft.....	8
Svingeligning med dempingsledd.....	8
Eksempel.....	9
Tvungne svingninger.....	10
Indre og ytre krefter. Dynamisk likevektsligning.....	10
Dynamisk lastfaktor.....	11
Eksempel.....	12
Variasjon av last og forskyvning. Tidsforsinkelse.....	12
Eksempel.....	13
Dynamiske laster og lastvirkning.....	14
Havbølger.....	14
Vind.....	15
Strøm.....	15
Andre dynamiske lasttyper.....	14
Dynamisk respons.....	17
Dynamisk respons for faste plattformer.....	17
Bevegelse av flytende konstruksjoner.....	17
Dynamisk respons for strekkstagplattformer.....	18
Dynamisk respons for slanke marine konstruksjoner.....	18
Oppgaver.....	20
Referanser.....	22

**Skip og andre marine konstruksjoner utsettes for krefter fra strøm, bølger og vind. Konstruksjonene må derfor utformes på en slik måte at de kan motstå disse kreftene.**

**Kunnskap om krefter og kreftenes virkning på konstruksjoner er derfor en viktig forutsetning for å kunne operere trygt under vekslende forhold på havet.**

### **Illustrasjon av Newtons første lov, anvendt på fortøyd skip i strøm**

Ifølge Newtons første lov må tyngden  $G$  og oppdriften  $F_b$  være i likevekt. Det samme gjelder strøm-kreftene  $F_s$  og krafta  $F_t$  fra tauet. Kraftene er illustrert med ulike skalaer i horisontal- og vertikal-retningen.



**Isaac Newton (1642 - 1727)**  
Newton levde på 1600-tallet og var datidens største vitenskapsmann. Han formulerte tre lover som er grunnlaget for forståelse av dynamikk.

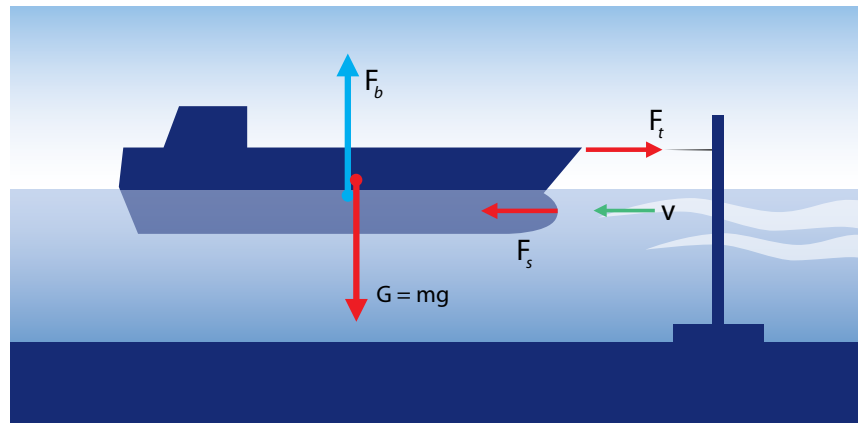
I dette kapitlet skal vi se spesielt på hvordan vi kan beregne virkning av krefter som varierer med tiden. Dette fagområdet kaller vi gjerne "dynamikk". Ordet er avledet fra det greske ordet "dynamis" som betyr kraft.

## **Repetisjon fra fysikken. Newtons tre lover**

### **Newtons første lov**

Newtons første lov sier at når summen av alle kreftene som virker på en gjenstand er null, er gjenstanden i ro eller beveger seg med konstant fart langs en rett linje. En slik tilstand kalles gjerne for "statisk likevekt".

For et skip som ligger i ro i stille vann, vil det være likevekt mellom skipets tyngde og oppdrift. Begge disse kreftene vil være vertikale. Dersom det er strøm i vannet og skipet er fortøyd med et horisontalt tau, vil det være likevekt mellom strømkreftene på skipet og krafta i tauet.



## **MÅL**

### **Etter å ha studert dette kapitlet skal du:**

- Kunne forklare hva vi generelt mener med svingninger, og med periodiske, harmoniske og irregulære svingninger, frie svingninger med og uten demping, samt egensvingninger og tvugne svingninger
- Ha blitt godt kjent med grunnleggende begreper som amplitude, periode, frekvens, vinkelfrekvens og fjærstivhet
- Kunne forklare hva vi mener med resonans og hvordan den oppstår
- Kunne forkare hva vi mener med dynamiske laster og kjenne til de viktigste dynamiske lasttyper for marine konstruksjoner
- Kunne forklare hvordan skip og andre marine konstruksjoner oppfører seg når de utsettes for dynamiske laster
- Kunne utføre enkle beregninger av svingninger

# Krefter og bevegelser for marine konstruksjoner

## Newtons andre lov

Newtons andre lov sier at når et legeme påvirkes av en ytre kraft  $\Delta F$  i tillegg til de kreftene som opptre i statisk likevekt, vil legemet få en akselerasjon i kraftas retning. Denne loven skriver vi gjerne

$$\Delta F = m \cdot a \quad (1)$$

Her er  $\Delta F$  tilleggskrafta med enhet Newton (N),  $m$  er massen med enhet kilogram (kg) og  $a$  er akselerasjonen som uttrykker hastighetsendring per tid og benevnes meter per sekund i sekundet ( $m/s^2$ ). Merk at kraftenheten N ikke er en grunnenhet i SI-systemet. Benytter vi bare grunnenhetene, ser vi av ligningen at kraft har benevnningen  $kg \cdot m / s^2$ .

En følge av denne loven er at dersom et skip ligger i ro og starter propellen, vil propellens skyvekraft  $F_p$  gi skipet en akselerasjon  $a$ . Skipets hastighet vil øke inntil motstanden  $F_m$  blir like stor som skyvekrafta fra propellen. Dermed har vi fått en ny likevektstilstand, men nå med en konstant hastighet.

## Newtons tredje lov

Newtons tredje lov kalles "Loven om aksjon og reaksjon" og sier noe om hvordan kreftene mellom to legemer vil være. Loven sier at dersom to legemer virker på hverandre med krefter, må kraften på det ene legemet være like stor men, motsatt rettet, i forhold til kraften som virker på det andre legemet.

Denne loven kan vi bruke for å se på kreftene som virker når en båt sleper en annen båt. Slepebåtens propell må gi en skyvekraft som er summen av krafta i slepeline og slepebåtens egen motstand, mens kraften i slepeline vil være like stor som motstanden for den båten som slepes. Et annet eksempel på kraft og motkraft er vist i figur på side 5-4.

**Illustrasjon av Newtons andre lov**  
 Propellen starter og gir skyvekraft  $F_p$  som er større enn motstanden  $F_m$ . Skipet får en akselerasjon:  
 $a = (F_p - F_m) / m$

Motstanden øker etter hvert som farten øker. Når motstanden  $F_m$  er blitt lik  $F_p$ , er vi tilbake i Newtons første lov, og farten holder seg nå konstant

### Krefter på skip

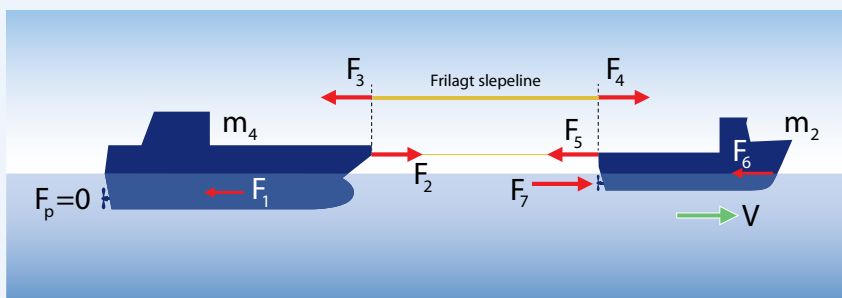
$F_1$  = strømningsmotst.  
 $F_2$  = kraft fra slepeline

### Krefter på slepeline

$F_3$  = strekkraft i line  
 $F_4$  = strekkraft i line

### Krefter på slepebåt

$F_5$  = kraft fra slepeline  
 $F_6$  = strømningsmotst.  
 $F_7$  = skyvekraft propell



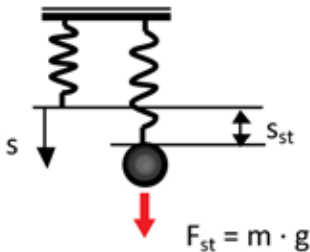
### Illustrasjon av Newtons tredje lov

Enten slepet foregår med konstant fart eller ikke, gir Newtons tredje lov to kraftpar hvor kraft og motkraft er like store og motsatt rettet:  
 $F_2 = -F_3$  og  $F_4 = -F_5$

Hvis slepefarten er konstant, kan Newtons første lov anvendes på hvert av de tre legemene. Dette gir:  
 $F_2 = -F_1$   
 $F_4 = -F_3$   
 $F_7 = -(F_5 + F_6)$



# Frie svingninger uten demping



Lodd som henger i ei fjær

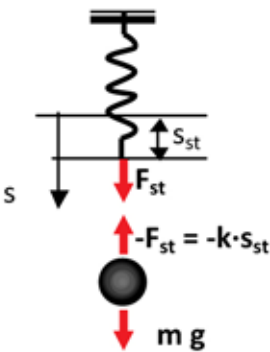
## Deformasjon og fjærstivhet. Statisk system

Vi skal nå benytte Newtons lover til å beskrive det som skjer, når det oppstår en dynamisk tilstand, eller en svingning. Utgangspunktet er et lodd som henger i ei fjær. Det er ingen bevegelse. Vi har en *statisk* tilstand. Loddet har en masse  $m$  (kg) og påvirkes av tyngdekrafta slik at krafta  $F_{st}$  i fjæra blir

$$F_{st} = m \cdot g \quad (2)$$

Her er  $g$  tyngdens akselerasjon, som på jorda er omlag  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Fjæra har en *stivhet* som forteller hvor stor kraft som må til for at fjæra skal få en lengdeforandring på 1 meter. Fjærstivheten kalles gjerne  $k$  og har benevnningen N/m. Sammenhengen mellom den statiske forskyvningen  $s_{st}$  og tyngden av loddet  $F_{st}$  er gitt av

$$s_{st} = F_{st} / k \text{ eller } F_{st} = k \cdot s_{st} \quad (3)$$



Likevekt for lodd som henger i ei fjær

Vi bruker begrepet "tyngde" for den krafta fjæra føler fra massen når massen utsettes for *tyngdens akselerasjon*  $g$ . Dette er den akselerasjonen en masse vil få dersom den faller fritt (uten luftmotstand) i jordas gravitasjonsfelt. Dersom vi flytter loddet og fjæra til månen, vil loddets masse være uforandret. Men fjæra vil få en mindre forlengelse fordi loddets tyngde er mindre på månen, der tyngdens akselerasjon bare er  $1.63 \text{ m/s}^2$ .

I denne tilstanden er det likevekt mellom tyngden av loddet og krafta i fjæra. Merk at fjæra opplever at krafta  $F_{st}$  er rettet nedover, mens for loddet virker den samme krafta oppover. Dette er et uttrykk for Newtons 3. lov: Aksjonskrafta er tyngdekrafta av loddet  $m \cdot g$ , mens reaksjonskrafta er fjærkrafta  $k \cdot s_{st}$ . Disse kreftene er like store, men de har motsatt retning. Summen av de to kreftene er null, systemet er med andre ord i likevekt:

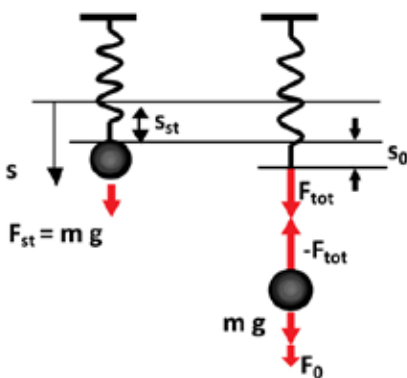
$$m \cdot g = k \cdot s_{st} \text{ eller } m \cdot g - k \cdot s_{st} = 0 \quad (4)$$

Mens loddet henger i ro, tar vi tak i det og drar det nedover et lite stykke  $s_0$ . For å gjøre dette må vi dra med ei kraft som er bestemt av fjærstivheten:

$$F_0 = k \cdot s_0 \quad (5)$$

$F_0$  er ei ytre kraft, og når vi holder loddet i denne posisjonen, er det likevekt mellom krafta i fjæra og summen av loddets tyngde og den krafta vi holder loddet med. Den totale krafta i fjæra er altså:

$$F_{tot} = F_{st} + F_0 = k \cdot (s_{st} + s_0) \quad (6)$$



Likevekt før loddet slippes

## Dynamisk system

Ut fra ligningene (6) og (2) ser vi at

$$m \cdot g + F_0 - k(s_{st} + s_0) = 0 \quad (7)$$

Summen av alle kreftene er null, systemet er nok en gang i likevekt. I denne tilstanden slipper vi loddet. Det som da vil skje, er at loddet begynner å bevege seg oppover og deretter nedover for så å gå oppover igjen; det oppstår en svingning. Vårt statiske system er blitt dynamisk. La oss se nærmere på hvordan vi kan beskrive det som skjer, ved hjelp av Newtons lover.

Idet vi slipper loddet vil krafta som vi måtte ha for å holde loddet nede, forsvinne. Krafta i fjæra vil være uforandret i dette øyeblikket, for fjæra har jo ikke forandret sin lengde. Dette betyr at det nå ikke er likevekt mellom tyngden av loddet og krafta fra fjæra. Den ubalanserte krafta er rettet oppover og har samme størrelse som den opprinnelige holdekrafta:

$$F_{ubal} = m \cdot g - F_{tot} = m \cdot g - k(s_{st} + s_0) = -k \cdot s_0 \quad (8)$$

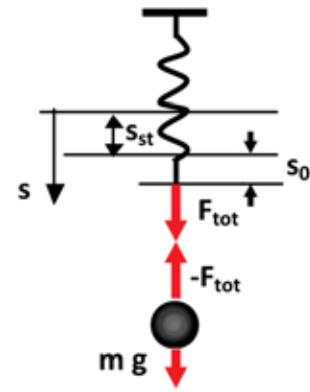
Den ubalanserte krafta er negativ fordi den er rettet oppover, altså i motsatt retning av positiv forskyving. Denne krafta vil føre til at loddet akselererer oppover. Akselerasjonen kan finnes fra Newtons 2. lov. Kraft = masse  $\times$  akselerasjon kan nå skrives:

$$-k \cdot s_0 = m \cdot a_0, \quad \text{eller: } a_0 = -k \cdot s_0 / m \quad (9)$$

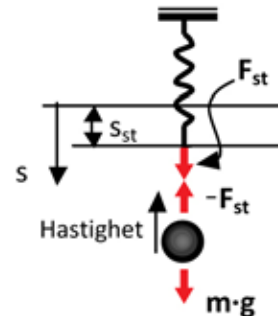
Etter hvert som loddet beveger seg oppover, vil krafta i fjæra avta slik at også akselerasjonen avtar. Når loddet passerer det punktet der det hang i statisk likevekt uten at vi dro det nedover, vil fjærkrafta være like stor som tyngden av loddet. Loddet vil da ikke lenger ha en akselerasjon, og det er tilsynelatende i likevekt. Men loddet har nå fått en hastighet oppover. I følge Newtons 1. lov kan denne hastigheten ikke endres uten at loddet påvirkes av nye krefter. Loddet vil altså fortsette sin bevegelse oppover.

Denne bevegelsen fører til at fjærkrafta blir redusert, noe som betyr at loddets tyngde - som virker nedover - blir større enn fjærkrafta som virker oppover. Vi får altså et kraftoverskudd nedover, noe som må bety at det oppstår en akselerasjon i samme retning.

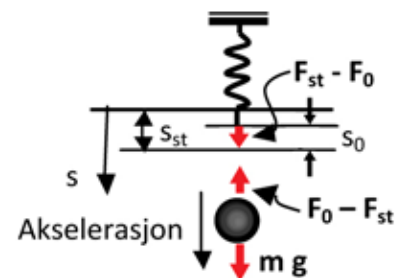
Ettersom loddet nå har en hastighet oppover, vil akselerasjonen fortone seg som en retardasjon. Hastigheten minker og fører til at loddets hastighet etter hvert blir null. Dette skjer når loddet er kommet like langt oppover fra den statiske likevektstilstanden som det ble trukket nedover til det punktet der vi slapp loddet da bevegelsen startet.



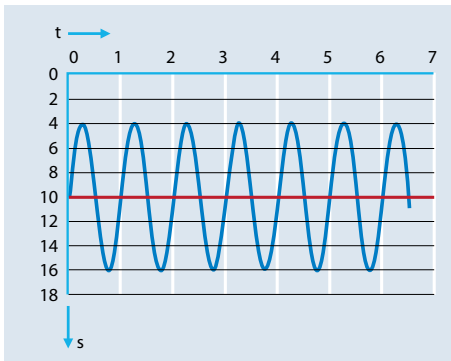
**Krefter på loddet like etter at det ble sluppet.**



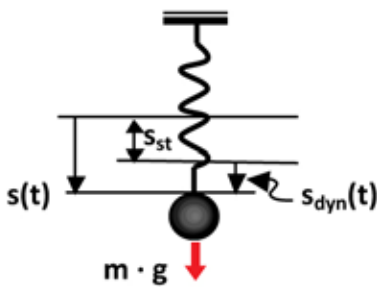
**Loddet passerer posisjon for statisk likevekt på veg opp**



**Krefter på loddet når det har maksimal forskyving oppover**



**Fri svingning uten demping**



**Definisjon av dynamisk forskyvning  $s_{dyn}(t)$**



**Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)**

**Periodisk svingning. Svingeligninga.**

På dette tidspunktet vil fjærkrafta være mindre enn tyngden av loddet. Loddet har dermed en ubalansert kraft nedover og vil akselerere i den retningen. Loddet vil nok en gang passere den statiske likevektsposisjonen. Nå har det fått en nedoverrettet hastighet som gjør at loddet fortsetter å bevege seg nedover. Fjærkrafta vil øke og bli større enn tyngden av loddet. Vi får en retardasjon slik at hastigheten minker og blir null når loddet kommer ned til det punktet der vi opprinnelig holdt det, før vi slapp det løs. Nå er loddet i samme tilstand som i utgangspunktet slik at de samme bevegelsene vil gjenta seg. Prosessen vil altså fortsette som en **periodisk svingning**. Ettersom det ikke er noen ytre krefter som påvirker forløpet, kalles dette en **fri svinging**. Vi ser at den statiske posisjonen nå blir en middelværdi for massens bevegelser (markert med rød strek på figuren). Det største utslaget fra denne posisjonen kalles svingingens amplitude.

For et vilkårlig tidspunkt  $t$  gjelder

$$-k \cdot s(t) + m \cdot g = m \cdot a(t) \tag{10}$$

Vi kan nå benytte oss av ligning (4) og får

$$-k \cdot s(t) + k \cdot s_{st} = m \cdot a(t) \tag{11}$$

Uttrykket  $s(t) - s_{st}$  blir den dynamiske forskyvingen som vi kan kalle  $s_{dyn}(t)$ . Dermed kan ligning (11) skrives som:

$$-k \cdot s_{dyn}(t) = m \cdot a(t) \tag{12}$$

Denne ligningen gir en direkte sammenheng mellom den dynamiske forskyvingen og akselerasjonen for vilkårlige tidspunkt. Vi kaller den gjerne for svingeligningen.

**Egenperiode og egenfrekvens**

Tidsrommet mellom hver gang loddet kommer tilbake til startposisjonen, kalles svingningens egenperiode. Denne benevnes ofte  $T_E$  og er bestemt av massens og fjæras størrelser. Egenperioden kan beregnes med formelen

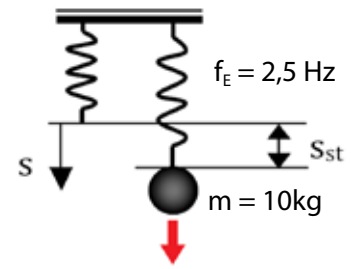
$$T_E = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13}$$

Dersom massen settes inn i formelen som kg og stivheten som N/m, får vi egenperioden i sekund. Formelen forteller oss at egenperioden vil øke når massen øker, systemet blir altså tregere. Dersom fjæra blir stivere, blir perioden redusert, det vil si at vi får en raskere svingning. Vi ser ofte at man benytter frekvensen i stedet for perioden til å karakterisere svingningen. Frekvensen uttrykker antall svingeperioder per sekund og beregnes med formelen

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14}$$

Enheten for frekvens er Hertz og forkortes Hz. Den har fått sitt navn etter den tyske fysikeren Heinrich Rudolf Hertz som ga viktige bidrag til vitenskapen om elektromagnetisme.

**Løsning av svingeligningen (ligning 12)** Skal vi vise hvordan uttrykket for egenperioden eller egenfrekvensen (ligning 13 eller 14) framkommer, krever det at vi først løser ligning 12, altså finner et uttrykk for  $s_{dyn}(t)$  som tilfredstiller ligningen. Det vil føre for langt å gjøre dette her i teksten, men spesielt interesserte elever kan forsøke å løse oppgave 5.4. Denne oppgaven gir samtidig god trening i derivasjon og innsikt i hvor anvendbar denne regnearten er.



**Fjærssystem for eksempel 5.1**

**Eksempel 5.1. Frie svingninger uten demping i et fjærssystem**

Et lodd med masse 10 kg er hengt opp i ei fjær. Når systemet kommer i svingninger, måles en egenfrekvens på 2,5 Hz. Bestem:

- a) Fjærkonstant,  $k$
- b) Statisk forskyving,  $s_{st}$
- c) Egenperiode,  $T_E$
- d) Amplitude  $s_o$  for en svingning som starter med "holdekraft" på 5N

Løsning

a) Fra lign. 5.14:  $k = 4 \cdot \pi^2 \cdot f_E^2 \cdot m = 4 \cdot \pi^2 \cdot (2,5 \text{ Hz})^2 \cdot 10 \text{ kg} = \underline{2460 \text{ N/m}}$

b)  $s_{st} = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{2460 \text{ N/m}} = 0,0398 \text{ m} \sim \underline{40 \text{ mm}}$

c)  $T_E = \frac{1}{f_E} = \frac{1}{2,5 \text{ Hz}} = \underline{0,4 \text{ s}}$

c)  $s_o = \frac{F_o}{k} = \frac{5 \text{ N}}{2460 \text{ N/m}} = 0,00203 \text{ m} \sim \underline{2 \text{ mm}}$

**Eksempel 5.2. Frie, vertikale svingninger for flytende vindturbin**

Figur til høyre viser en prototyp på et "Hywind" vindkraftanlegg. Totalt deplasement er  $\nabla_{tot} = 8000 \text{ m}^3$ . Søylene har en diameter i vannlinjen lik 6 m. Den er anket opp med tre liner. Vi skal imidlertid se på bevegelsene før linene er montert, altså når systemet flyter fritt.

- a) Også legemer som flyter har en "fjærstivhet". Som ellers, kan vi definere stivheten som kraftøkning per m forskyving. I dette tilfellet må vi da se på forandringen i oppdrift ( $\Delta B$ ) per m forskyving av dypgangen. Vi kaller gjerne slik stivhet for vannplanstivhet i stedet for fjærstivhet. Forklar hvorfor det er arealet ( $A_{vi}$ ) i vannlinjen som teller, og utled at vannplanstivheten er:

$$k = A_{vi} \cdot \rho \cdot g$$

- b) Beregn vannplanstivheten i vertikal retning for konstruksjonen
- c) Beregn egenperioden for små, vertikale bevegelser

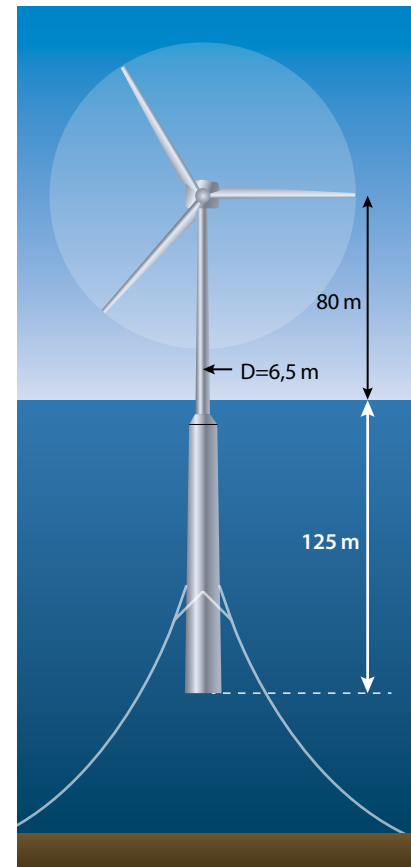
Løsning

- a) Det er konstruksjonens dimensjoner og form i vannlinjen og like over og under den, som bestemmer hvor mye oppdriften forandres i forhold til forandringene i dypgangen. "Fjærstivheten" blir da:

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{A_{vi} \cdot \Delta H \cdot \rho \cdot g}{\Delta H} = A_{vi} \cdot \rho \cdot g$$

b)  $k = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot g = \pi \cdot (3,25 \text{ m})^2 \cdot 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = \underline{333 \text{ kN/m}}$

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\nabla \cdot \rho \cdot g}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{8000 \text{ m}^3 \cdot 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{333 \cdot 10^3 \text{ N/m}}} = \underline{97 \text{ s}}$$



**Hywind vindkraftanlegg**

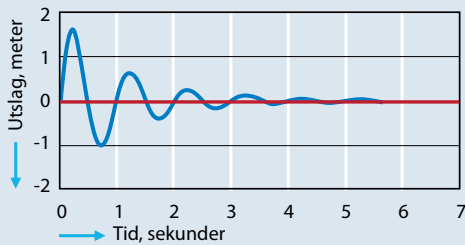
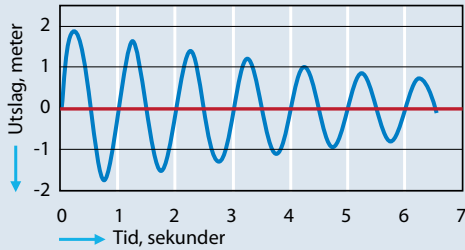
Noen generelle data:  
 Totalt deplasement: 8000 m<sup>3</sup>  
 Vindturbinens effekt: 5-6 MW  
 Vindturbinens rotordiameter: 120 m



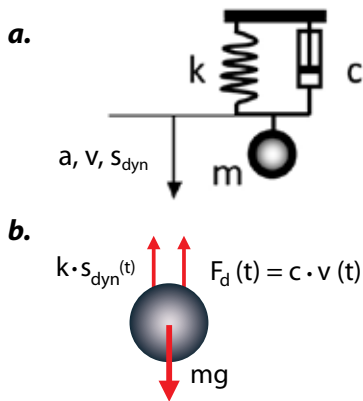
**Vi undrer oss på:**

En pendel svinger, men hvordan kan vi beregne egenperioden når den ikke har ei fjær?

# Frie svingninger med demping



**Eksempler på dempede frie svingninger med liten demping (øverst) og stor demping (nederst)**



**a. Prinsipiell illustrasjon av et fjær-masse-system som gir svingninger med demping**  
**b. Fritt-legeme-diagram, påført alle krefter som virker på massen ved positiv bevegelse.** Vi tar imidlertid ikke med tyngden  $m \cdot g$  i ligning 16 fordi denne allerede er tatt hensyn til ved å bruke  $s_{dyn}(t)$  i stedet for  $s(t)$ , se figur side 5-6.

Dersom vi gjør forsøket med massen og fjæra, vil vi se at loddets bevegelser vil avta over tid. Loddet kommer ikke helt ned til det stedet der svingningen startet, og etter en tid vil loddet henge i ro i sin opprinnelige statiske likevektstilstand. Dette skyldes det vi kaller demping og betyr at den energien loddet og fjæra hadde, tappes fra systemet. For vårt lodd vil det være luftmotstanden som er det viktigste dempingsbidraget, og energien vil gå over til varme i lufta. Denne typen svingning kalles en dempet fri svingning.

Et velkjent eksempel på en kombinasjon av demper og fjær er støtdempere i biler. Hensikten med å ha støtdempere er å sørge for at karosseriet kan bevege seg i forhold til understellet når bilen kjører over en hump. Samtidig er det viktig at bevegelsen stopper opp så raskt som mulig etter at humpen er passert. Støtdempere i biler gir derfor en stor demping.

## Dempingskraft

Demping vil vi beskrive som ei kraft  $F_d$  som alltid virker i motsatt retning av hastigheten, og som øker proporsjonalt med hastigheten. Sammenhengen mellom dempingskrafta  $F_d(t)$  og hastigheten  $v(t)$  er da gitt av formelen

$$F_d(t) = -c \cdot v(t) \quad (15)$$

Her er  $c$  en dempingskoeffisient. Ettersom  $F_d$  har enheten N, må benevnningen for  $c$  være N/(m/s). Produktet av  $c$  og hastigheten  $v$  blir dermed en kraft med enheten N. Minustegnet i formelen er en følge av at krafta fra en demper alltid er rettet mot hastigheten.

## Svingeligning med dempingsledd

Summen av krafta i fjæra og krafta i demperen vil være en ubalansert kraft som vil gi massen en akselerasjon. Sammenhengen mellom forskyving, hastighet og akselerasjon kan da skrives:

$$-c \cdot v(t) - k \cdot s_{dyn}(t) = m \cdot a(t) \quad (16)$$

Fortegnene forteller oss at når hastigheten er positiv (rettet nedover på figuren), vil krafta fra demperen, slik massen merker den, være negativ. Tilsvarende vil en positiv forskyving føre til at massen merker ei negativ kraft fra fjæra. Dersom summen av krafta i demper og fjær er negativ, betyr det at den ubalanserte krafta er negativ, slik at akselerasjonen  $a(t)$  også blir negativ, altså rettet oppover på figuren.

**Løsning av svingeligning med dempingsledd.** Vi har foran konkludert med at frie svingninger uten demping har en egenperiode  $T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$ . Løsning av ligning 16 ovenfor gir tilsvarende et uttrykk for egenperioden for frie svingninger med demping:

$$T_{E,d} = \frac{T_E}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4 \cdot k \cdot m}}} \quad (17)$$



Dempingens virkning på amplitudene beskrives av en eksponensialfunksjon som er vist på figuren til høyre. Vi kan ikke bruke plass på utledning av denne ligningen, men riktigheten kan bekreftes ved å bruke kjente derivasjonsregler på lignende måte som i oppgave 5.7.

Den spesifiserte eksponensialfunksjonen gir følgende forhold mellom hvilke som helst to utslag som følger på hverandre:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{c \cdot T_{E,d} / (2 \cdot m)} \quad (18)$$

Her er  $c$  dempingskoeffisienten som er innført tidligere. Det kan ofte være vanskelig å finne passende erfaringsverdier for denne. Eksempellet nedenfor viser hvordan  $c$  i stedet kan beregnes fra målinger.

**Eksempel 5.3: Damping av svingninger av en bøye**

Svingningene som er vist til høyre, skriver seg fra en 0,4 meter høy bøye med masse 17,9 kg og øvrige data som vist til høyre. Bøya er festet til bunnen med en slakk line. En passerende enkeltbølge setter bøya i svingninger. Disse registreres med måleutstyr, og forløpet er som vist på figuren. Vi ser at svingningene dempes fort. Dempingen skyldes hydrodynamiske krefter mot bøya og lina når disse beveger seg i vannet. Tyngdepunktet er plassert slik at bøya flyter vertikalt.

Opgaver:

- a) Hvor stor er dempingskoeffisienten,  $c$ , for bøyas svingninger?
- b) Bruk dempingskoeffisienten til å kontrollberegne egenfrekvensen for de frie, dempede svingningene

Løsninger:

- a) Leser av på figur:  $A_1 = 15 \text{ mm}$ ,  $A_2 = 6 \text{ mm}$ ,  $T_{E,d} = 1,0 \text{ s}$   
Innsatt i ligningen øverst på siden, gir dette:

$$15/6 = e^{c \cdot 1,0 \text{ s} / (2 \cdot 17,9)}$$

Dempingskoeffisienten,  $c$ , finnes ved å bruke naturlige logaritmer på begge sider av likhetstegnet:

$$\ln 2,5 = \frac{c \cdot 1,0 \text{ s}}{2 \cdot 17,9 \text{ kg}} \rightarrow c = \frac{2 \cdot 17,9 \text{ kg}}{1,0 \text{ s}} \cdot \ln 2,5 = 33 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 33 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$

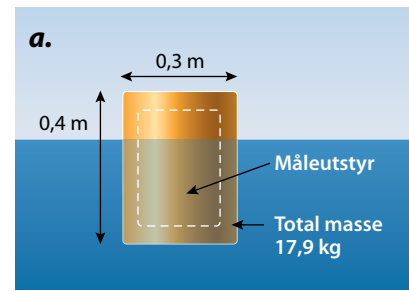
- b) Finner først egenperioden for frie, udempede svingninger:

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{17,9 \text{ kg}}{710 \text{ N/m}}} = 1,0 \text{ s}$$

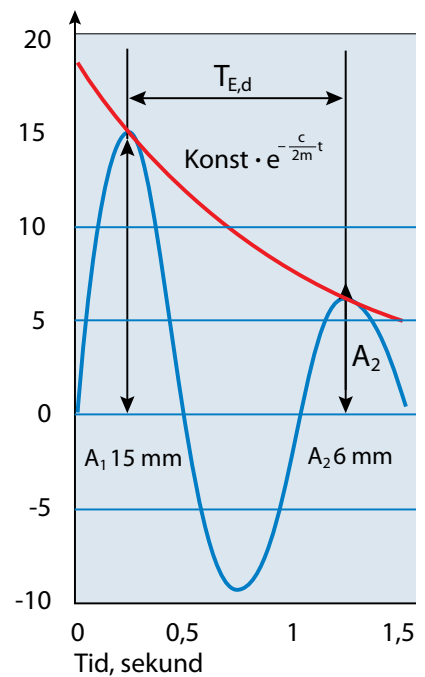
Vi kan så finne den dempede egenperioden ved å bruke lign.17, som gir:

$$T_{E,d} = \frac{T_E}{\sqrt{1 - \frac{(33 \text{ N s/m})^2}{4 \cdot 710 \text{ N/m} \cdot 17,9 \text{ kg}}}} = 1,0011 \text{ s}$$

Vi ser at egenperioden for den dempede svingningen for vårt tilfelle bare er marginalt lengre enn for udempet svingning. Dersom dempingskoeffisienten øker, vil imidlertid forskjellen også øke.



b. Utslag A fra statisk likevektsstilling [mm]



**Bøye med måleutstyr**

**a. Data for bøye:**

Total masse:  $m = 17,9 \text{ kg}$   
 "Fjærstivhet":  $k = A_{vi} \cdot \rho \cdot g = \pi \cdot (0,15 \text{ m})^2 \cdot 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 710 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

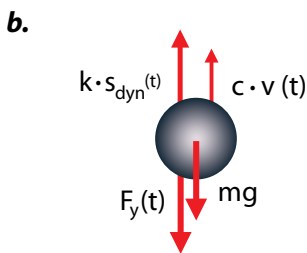
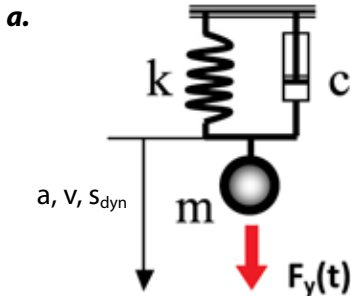
**b. Frie, dempede svingninger målt på bøya**



**Vi undrer oss på:**

Hvordan er støtdemperen på en bil laget når den både skal gi fjæring og demping?

# Tvungne svingninger



- a. Prinsipiell illustrasjon av et fjær-masse-system som påvirkes av ei ytre kraft  $F_y(t)$  som gir tvungne svingninger
- b. Fritt-legeme-diagram, påført alle krefter som virker på massen i systemet.

## Indre og ytre krefter. Dynamisk likevektslikning

Vi har hittil sett på krefter i fjæra og demperen og funnet en sammenheng mellom disse og massens akselerasjon. De to kreftene kaller vi gjerne "indre krefter" da de er bestemt av egenskapene til det systemet vi ser på. Ytre krefter på marine konstruksjoner kommer gjerne fra bølger og vind, og vi skal nå se hvordan vi kan ta med slike krefter i vår dynamiske analyse.

Dersom vi har ei ytre kraft som varierer med tiden,  $F_y(t)$ , må vi legge denne sammen med de øvrige kreftene for å finne hvilken akselerasjon massen vil få. Vi kan altså skrive

$$-c \cdot v(t) - k \cdot s_{dyn}(t) + F_y(t) = m \cdot a(t) \quad (19)$$

Denne ligningen ser unektelig litt uryddig ut. Vi har tre ukjente størrelser, nemlig forskyvning  $s$ , hastighet  $v$  og akselerasjon  $a$  - og vi må tilsynelatende kjenne både hastighet, forskyvning og ytre kraft for å finne ubalansert kraft og dermed kunne beregne akselerasjonen. Det var den franske vitenskapsmannen d'Alembert som først fant en måte å løse problemet på. Han innså at  $m \cdot a$ -leddet tilsynelatende blir ei kraft og at denne "krafta" kan inngå i ligningen på samme måte som krafta i fjæra og demperen. Dermed kunne han skrive ligningen slik:

$$m \cdot a(t) + c \cdot v(t) + k \cdot s_{dyn}(t) = F_y(t) \quad (20)$$

Denne ligninga kalles gjerne "dynamisk likevektslikning" selv om  $m \cdot a$ -leddet egentlig ikke er ei kraft. Ligninga uttrykker Newtons andre lov og beskriver det som skjer når en masse utsettes for ei ubalansert kraft.

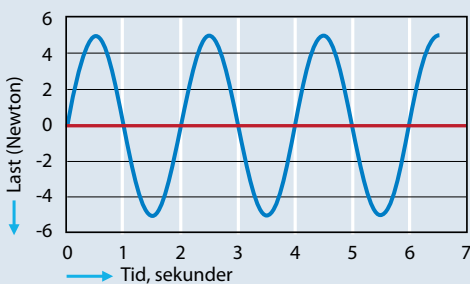
Men problemet er ikke løst med dette. Dersom vi kjenner den ytre lasta, vil ligningen inneholde tre ukjente størrelser:  $a(t)$ ,  $v(t)$  og  $s(t)$ . For å finne ei løsning må vi alltid ha like mange ligninger som ukjente. I prinsippet kan vi finne to nye ligninger fra definisjonen av hastighet og akselerasjon. Hastighet er den deriverte av forskyvningen med hensyn til tid, og akselerasjon er den deriverte av hastigheten:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

Den typen ligning vi nå får, kalles differensialligning. Vi skal ikke gå inn på hvordan vi kan finne en løsning, men bare gi en kort beskrivelse av viktige egenskaper for enkle dynamiske systemer. Vi begrenser diskusjonen til tilfeller der lasta kan beskrives som en sinus-funksjon:

$$F(t) = F_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_L} t\right) \quad (22)$$

Her er  $F_0$  lastas største verdi, som vi kaller lastas amplitude, og  $T_L$  er lastas periode. Tidsvarierende funksjoner av typen sinus og cosinus kalles gjerne harmoniske funksjoner. Det er verd å merke seg at fri, udempet svinging som er omtalt tidligere, også er en slik harmonisk funksjon.



**Last gitt som sinusfunksjon.**  
Periode = 2 sekunder

## Dynamisk lastfaktor

Et system som utsettes for en tidsvarierende last som kan beskrives med en harmonisk funksjon (se ligning 22), vil få en svingning som kan beskrives på samme måte, altså som en harmonisk funksjon. Perioden for denne svingningen vil være den samme som for lasta. Amplituden for denne svingningen kan finnes fra formelen

$$s_0 = \frac{F_0}{k} \cdot DLF \quad (23)$$

Her er  $F_0$  amplituden for lasta,  $s_0$  er amplituden for bevegelsen og  $F_0/k$  den forskyvingen som vil oppstå dersom systemet var utsatt for en statisk last med verdi  $F_0$ , se ligning (3). DLF blir da en "Dynamisk lastfaktor" som er bestemt av forholdet mellom egenperioden og lastas periode,  $T_E/T_L$ , og dempingskoeffisienten  $c$ . Figuren viser hvordan DLF varierer med periodeforholdet  $T_E/T_L$  for ulike dempingsverdier.

### Resonans

- Vi ser av figuren at responsen kan bli svært stor for et periodeforhold nær 1.0. For dette periodeforholdet har vi resonans.
- Vi ser også at dersom egenperioden er vesentlig kortere enn lastperioden (eller lastperioden vesentlig lengre enn egenperioden), blir  $DLF = 1.0$ .
- Dersom lastperioden er svært kort (egenperioden lang), får vi liten respons i forhold til den forskyvingen lasta ville gitt dersom den var konstant over tid (statisk last).
- En annen observasjon er at ulike verdier for demping gir helt ulik respons nær resonans, men demping betyr lite dersom vi har periodeforhold lavere enn 0,4 eller høyere enn 1,8 (omtrentlige verdier).

Vi kan finne den matematiske formelen for den dynamiske lastfaktoren ved å løse ligning (19) for en tidsvarierende last som er gitt som en sinus-funksjon, se ligning 22. Det vil føre for langt å utlede formelen her. Resultatet blir:

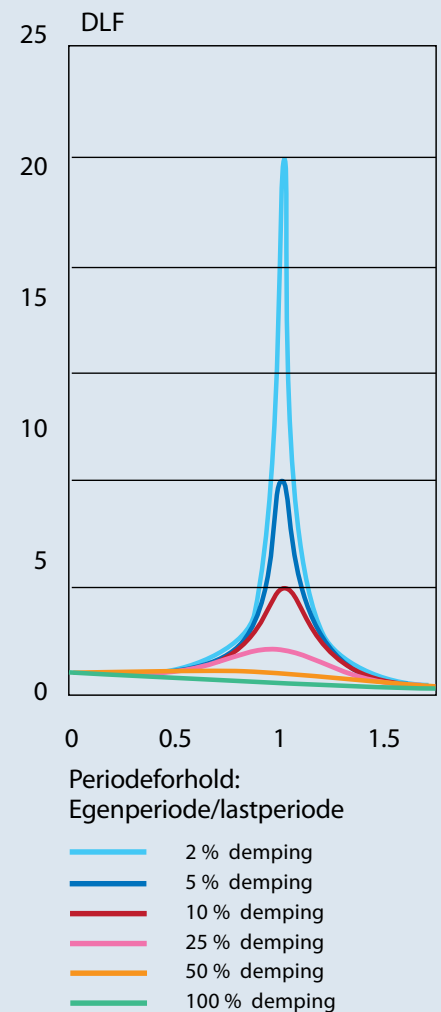
$$DLF = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{T_E}{T_L}\right)^2\right)^2 + \frac{c^2}{m \cdot k} \left(\frac{T_E}{T_L}\right)^2}} \quad (24)$$

Ligningen er illustrert i figur til høyre. Se også eksempel på neste side.



### Vi undrer oss på:

Resonans er ikke bra for en konstruksjon, men kjenner du eksempler på at vi gjerne vil ha resonans?



### Dynamisk forsterkningsfaktor

I figuren er dempingen oppgitt i prosent. Dette er den vanligste måten å karakterisere demping på og refererer til hvor stor dempingen er i forhold til en demping som fører til at fri svinging vil stoppe opp i løpet av første svingeperiode. Da er:

$$\text{Demping i \%} = \frac{100 \cdot c}{2\sqrt{m \cdot k}} \quad (25)$$

**Eksempel 5.4. Dynamisk lastfaktor for dempede, tvungne svingninger av bøye**

I eksempel. 5.3 beregnet vi en dempingskoeffisient  $c = 33 \text{ N} \cdot \text{s/m}$  for ei bøye med masse  $m = 17,9 \text{ kg}$ , fjærstivhet  $k = 710 \text{ N/m}$  og egenperiode  $T_E = 1,0 \text{ s}$ . Vi tenker oss nå at bølger utsetter bøya for en vertikal last som gitt i ligning 22, med maksimal amplitude  $F_0 = 35 \text{ N}$  og lastperiode  $T_L = 1,25 \text{ s}$ .

Oppgaver:

Bestem:

- a) Tenkt statisk forskyving som svarer til den maksimale lasta  $F_0$
- b) Dynamisk lastfaktor DLF og amplitude  $s_0$  for de tvungne svingningene. Tegn inn i figuren for DLF den beliggenhet som den funne verdien gir for bøya.
- c) Dempingen i %. Hvordan stemmer dette med grafene for forskjellige dempinger i figuren?

Løsninger:

a) Tenkt statisk forskyving =  $F_0 / k = 35 \text{ N} / 710 \text{ N/m} \sim 0,05 \text{ m}$

b) Ved innsetting av verdiene ovenfor i ligning 22, får vi:

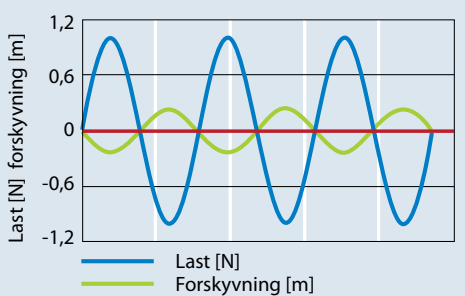
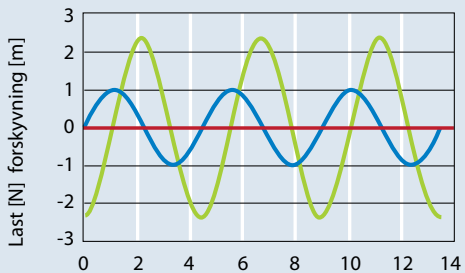
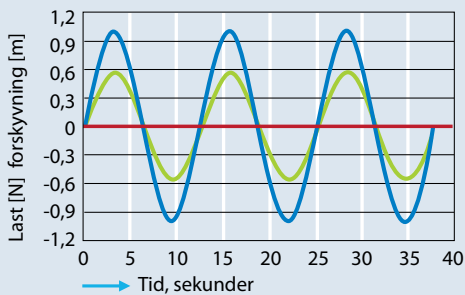
Dynamisk lastfaktor  $DLF = 2,3$ , som gir punkt A i figuren

Dynamisk amplitude:  $s_0 = (F_0 / k) \cdot DLF = 0,05 \text{ m} \cdot 2,3 = 0.12 \text{ m}$

c)

$$\text{Lign. 25: Demping} = \frac{100\% \cdot 33 \text{ N} \cdot \text{s/m}}{2 \cdot \sqrt{17,4 \cdot 710 \text{ N/m}}} = 15\%$$

Vi ser at dette passer godt med avlesing på figuren.



**Variasjon av last og forskyving. Tidsforsinkelse.**

Dersom vi observerer tidsforløpet for last og forskyving, vil vi se at de to størrelsene ikke varierer synkront; forskyvingen ser ut til å være litt forsinket i forhold til lasta. Tidsforsinkelsen kan vi måle ved å se hvor lang tid det går fra lasta har hatt en maksimalverdi til forskyvingen får sin maksimalverdi. Dersom vi varierer lastas amplitude og frekvens, vil vi se at tidsforsinkelsen vil endre seg når frekvensen endres, men ikke når lastamplituden endres. Dette er illustrert på de tre figurene som viser last og forskyving som funksjon av tida når lastamplituden holdes konstant, men lastfrekvensen varierer.

Den øverste figuren viser dette for en langsomt varierende last. Her er tidsforsinkelsen liten. Forskyvningen er nesten i fase med lasta. Systemet oppfører seg nesten statisk; vi benytter gjerne begrepet "kvasi-statisk respons" om dette. Forskyvningen varierer nok med tiden, men responsen følger lasta, og den dynamiske lastfaktoren er nær 1.

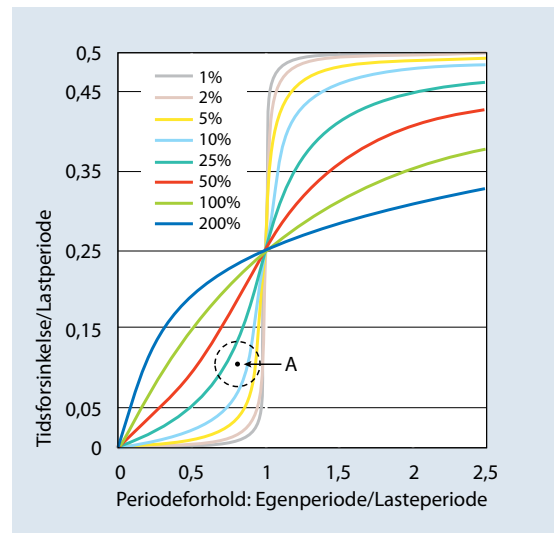
På den midterste figuren er lastfrekvensen nær egenfrekvensen. Tidsforsinkelsen er nå blitt omlag en kvart periode. Lasta har rullet å bli nær null når forskyvningen har sin største verdi. Vi ser også at forskyvningens amplitude har øket kraftig, noe som er en direkte følge av at dynamisk lastfaktor nå er stor, jevnfør figuren på forrige side.

**Variasjon av last og forskyving**



Den nederste av de tre figurene viser tidsforløpene når lastas frekvens er vesentlig høyere enn systemets egenfrekvens. Nå er lasta og forskyvningen i motfase. Når lasta har sin største positive verdi, er forskyvningen stor og negativ. Responsen ligger en halv periode bak lasta. Amplituden er nå blitt lavere enn i de to foregående tilfellene. Den dynamiske lastfaktoren er liten fordi systemet nå er for tregt til at det klarer å følge med i lastas hurtige variasjon. Merk at forskyvningens frekvens alltid er den samme som lastfrekvensen, men den høye frekvensen fører til at amplituden blir liten.

**Demping og tidsforsinkelse.** Lastas amplitude påvirker ikke tidsforsinkelsen mellom last og forskyvning, men dempingsnivået gjør det. Ved å variere demping og frekvens kan vi finne tidsforsinkelsen som funksjon av begge disse størrelsene. Dette er vist på figuren til høyre. Hver kurve viser forholdet mellom tidsforsinkelsen og lastperioden når forholdet mellom egenperioden og lastperioden varierer. Figuren viser slike kurver for flere dempingsnivå. Dersom periodeforholdet er lavt (langsom variasjon av lasta), er tidsforsinkelsen liten. Ved resonans kommer forskyvningen alltid en kvart periode etter lasta. Dersom lastvariasjonene blir raske, altså at lastperioden blir langt kortere enn egenperioden, vil tidsforsinkelsen bli halve perioden for lave dempingsnivå. Last og forskyvning kommer altså i motfase. Det er viktig å kjenne til disse forholdene for å forstå hvordan marine konstruksjoner oppfører seg når de utsettes for bølgekrefter.



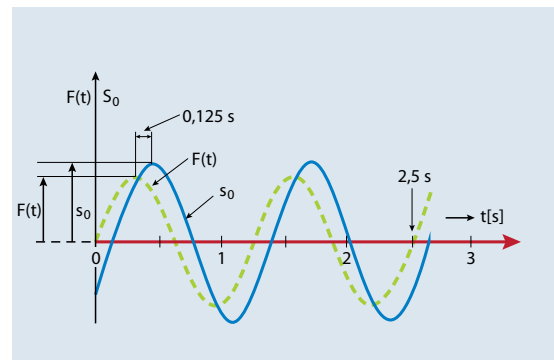
**Tidsforsinkelse i forhold til lastperioden for varierende demping i prosent av kritisk demping**

**Eksempel 5.5. Last, forskyvning og tidsforsinkelse for bøye**

Vi skal fortsette analysen av bøya som har blitt beregnet i eksemplene 5.3 og 5.4.

Oppgaver

- a) Bøyas beliggenhet i et DLF-diagram ble på side 5-11 beskrevet ved hjelp av punkt A. Tegn også inn punkt A i diagrammet for til demping og tidsforsinkelse til høyre.
- b) Bestem tidsforsinkelsen mellom lastas variasjon og bøyas forskyvning.
- c) Tegn i samme figur grafer for lastas variasjon og forskyvningens forløp.
- d) Gir de to forløpene omtrent samme helhetsbilde som figurene på side 5-22 viser?



**Variasjon av last og forskyvning for bøye i eksempel 5.5**

$T_E/T_L = 1,0/1,25 = 0,8, \Delta T = 0,125s$

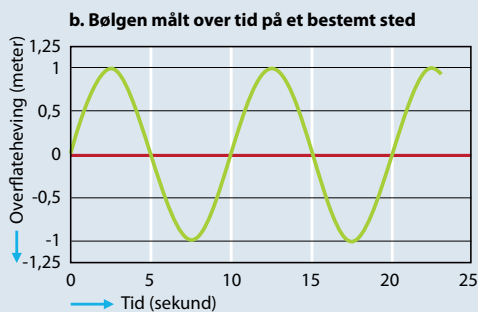
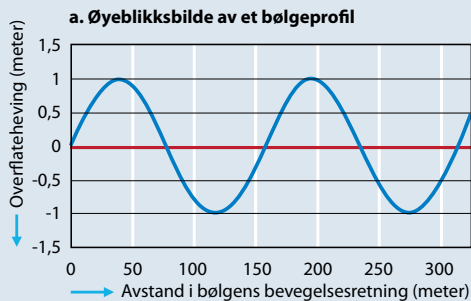
Løsninger:

- a) Se figuren
- b) Leser av:  $Tidsforsinkelse/Lastperiode = 0,10$ , som gir:  
 $Tidsforsinkelse = 0,10 \cdot 1,25 s = 0,125 s$
- c) Svingningsforløp for last og bøyas forskyvning: Se figur
- d) Når  $T_E / T_L < 1,0$ , som i eksemplet, er det naturligst å sammenligne med den øverste av diagrammene på side 5-12, og vi ser at det er stor likhet.

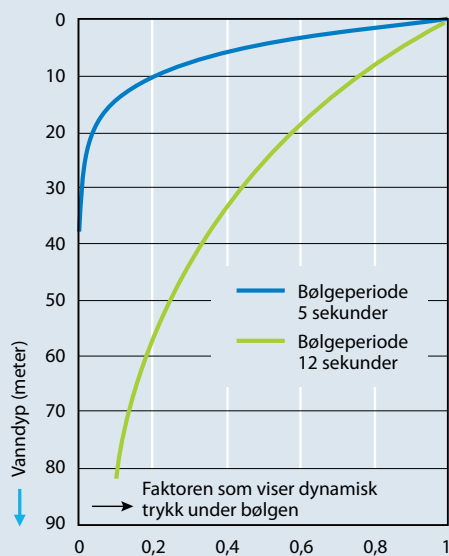


**Vi undrer oss på:**  
Hvorfor blir tidsforsinkelsen alltid en kvart periode når lastperioden er den samme som egenperioden?

# Dynamiske laster og lastvirkning



**Bølgeprofiler**



**Dynamisk trykk under bølger**

Skip og marine konstruksjoner utsettes for tidsvarierende laster fra flere ulike kilder. Vi skal her gi en kort oversikt over de viktigste dynamiske lasttypene og forklare hvordan typiske konstruksjoner vil oppføre seg når de utsettes for slike laster.

## Havbølger

Havbølger er utførlig beskrevet i kapittel 1. Vi skal her bare gi en stikkordsmessig beskrivelse av de viktigste forhold som har betydning for dynamiske krefter.

- Havbølger skapes av vind, men det er tyngdekrafta som bestemmer bølgenes form og vandring.
- Bølgelengden  $L$  er avstanden mellom to bølgetopper. Bølgeperioden  $T$  er tiden det tar fra en bølgetopp passerer et visst sted til den neste bølgetoppen kommer på det samme stedet. Sammenhengen mellom bølgeperioden  $T$  og bølgelengden  $L$  på dypt vann er gitt ved

$$\text{formelen } L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (26)$$

Her er  $g$  tyngdens akselerasjon. Med "dypt vann" menes at vann-dypet er større enn en halv bølgelengde.

- De bølgene som har betydning for vanlige skip og marine konstruksjoner, har perioder mellom 4 og 25 sekunder. Dette betyr at bølgelengdene varierer mellom 25 og 975 meter.
- De høyeste bølgene som vi forventer å se i norske farvann, er omlag 32 meter fra bølgedal til bølgetopp. En slik bølge har en periode på omlag 15 sekunder. Bølgelengden vil da være 350 meter.
- Bølger med lengre perioder enn 20 sekunder kalles vanligvis dønninger, og har langt mindre langt mindre bølgehøyder enn de største bølgene.
- Bølger med lange perioder påvirker trykk og gir vannbevegelser langt nedover i dypet, mens bølger med kort periode dempes ut på et langt mindre dyp. En bølge med 15 sekunders periode vil merkes helt ned til 150 meters dyp, mens en bølge med 4 sekunders periode bare skaper merkbare bevegelser ned til 10 meter.
- Havbølger er uregelmessige slik at de bølgene som opptrer i en gitt situasjon, inneholder mange bølgefrequenser. Se figur neste side. Dette har stor betydning for hvordan bølgene påvirker skip og marine konstruksjoner. For å beskrive slike bølger må vi bruke statistikk, men vi kan ikke gå inn på teorien for denne typen beregninger her.

## Vind

Vind beskrives gjerne ved å oppgi en midlere vindhastighet og en karakteristisk verdi for vindkast. Eksempel: "Vindhastighet 20 m/s med 30 m/s i kastene". Dette tolker vi som at vi har en midlere hastighet på 20 m/s og en dynamisk variasjon med karakteristisk amplitude på 10 m/s. Middelvinden vil gi en konstant (statisk) kraft på en konstruksjon, mens vindkastene vil gi tidsvarierende (dynamiske) krefter.

Den dynamiske vindhastigheten er, i likhet med bølger, uregelmessig, og vi må derfor benytte statistikk når vi skal beskrive vind.

## Strøm

Du kan lese mer om havstrømmer på sidene fra 11-12 til 11-15. De kan deles i flere typer.

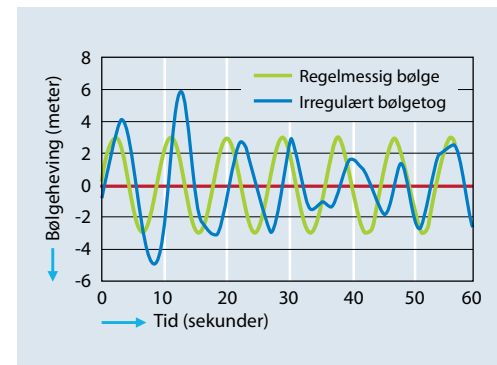
- Globale strømmer som styres av temperaturforskjeller på jordkloden, de store kontinentenes beliggenhet og jordrotasjonen. Golfstrømmen er en slik global havstrøm.
- Lokale havstrømmer som styres av vannmengder fra de store elver, ulikt saltinnhold og lokal geografi. Den norske kyststrømmen, som har sitt utgangspunkt i Østersjøen, er en slik strøm. Det er et upresist skille mellom globale og lokale havstrømmer.
- Strøm som skyldes tidevann, er egentlig en gravitasjonsbølge som går rundt jordkloden og som har to bølgetopper. Den skaper høyvann omtrent to ganger i døgnet. Tidevannsstrømmen er ikke kraftig i de store havrommene, men kan bli meget sterk på grunn av lokal geografi. I Norge har vi flere eksempler på det. Saltstrømmen ved Bodø er kanskje den mest kjente.
- Vinddrevet strøm skyldes skjærkrefter (friksjon) mellom luft og vann. Strømretningen vil avvike fra vindens retning. Denne strømkomponenten vil bygges opp gradvis av vedvarende vind og vil fortsette noe tid etter at vinden har sluttet å blåse. Les mer på side 11-12.
- Spesielle hendelser, f.eks. virvelavløsning i globale strømfelt ved spesielle kystformasjoner eller plutselige "fallstrømmer" fra grunt vann ned til store havdyp som følge av forskjeller i tetthet. Denne typen strømmer kan bli meget kraftige, men har kort varighet og liten geografisk utbredelse.

Tidsvarierende strøm kan nok skape problemer for visse typer marine operasjoner, men vi vil vanligvis ikke se på dette som dynamiske effekter fordi endringene skjer langsomt. En stabil strøm vil imidlertid føre til virvelavløsning rundt konstruksjoner, se figur side 5-17, og slike virvler vil gi tidsvarierende krefter som kan gi vesentlig dynamisk respons. Perioden for virvelavløsning rundt en sirkulær sylinder,  $T_v$ , kan beregnes ut fra formelen

$$T_v = 5 \frac{D}{V}$$

Her er  $V$  strømhastigheten i m/s og  $D$  diameteren på sylindere i meter. Faktoren 5 er bestemt ut fra observasjoner av virvelavløsning.

Det vil oppstå krefter på tvers av strømretninger med samme periode som virvelavløsningen. Slike krefter er ikke store i forhold til bølgekrefter, men ved resonans kan de likevel gi store bevegelser. Denne typen bevegelser er et problem for lange, slanke rør av ulik type, men også for flytende plattformer.



### Bølgehevinger i regelmessige og uregelmessige bølger



#### Vi undrer oss på:

Hvorfor blir tidsforsinkelsen alltid en kvart periode når lastperioden er den samme som egenperioden?

## Andre dynamiske lasttyper

**Jordskjelv** medfører vertikale og horisontale bevegelser av sjøbunnen og vil gi svingninger i konstruksjoner som står der dette skjer. Jordskjelv er sjeldne i havområdene rundt Norge, og de som opptrer har lav intensitet. Likevel må plattformer på norsk sokkel kontrolleres slik at man er sikker på at de tåler de jordskjelvene vi tror kan komme. Det er imidlertid få eksempler på at jordskjelv har hatt betydning for utformingen av våre konstruksjoner.

**Tsunami** er en type havbølger som skapes av jordskjelv, se side 1-28/29. Det er store vertikale forskyvninger av havbunnen som er spesielt farlige. En tsunami er helt ufarlig – knapt merkbar – på stort vandyp, men når bølgen når inn mot land, kan den få meget dramatiske følger. Bølgen kan bli svært høy og skylle langt innover land. Det er bunnforholdene i strandsonen som avgjør hvor farlig en tsunami er. Det er områder der vandypet øker gradvis over en lang strekning fra land som er spesielt utsatt. Les mer på sidene 1-28/29.

**Kollisjon** mellom to skip eller mellom skip og plattform skjer, men heldigvis sjeldent. Slike støt vil kunne gi skader på både skip og plattform, og bare en dynamisk analyse kan gi svar på hvor store skadene kan bli. Alle plattformer på norsk sokkel er utformet for å tåle kollisjoner av en viss størrelse uten at det fører til havari. Du kan lese mer om dette på side 6-25.

**Gjenstander som faller** vil gi en dynamisk belastning der fallet ender. Det oppstår en kortvarig last av samme type som ved en kollisjon. Det er spesielt viktig å beskytte bunninstallasjoner for oljeproduksjon mot fallende gjenstander. Krav om slik beskyttelse er gjennomført på norsk kontinentalsokkel.

**Ekspløsjon** er en annen type hendelse som gir en kortvarig dynamisk last. Ekspløsjoner i et lukket rom vil føre til store skader, og eksplosjoner har ført til flere totalhavari av skip. Det er mulig - men ikke vanlig - å utføre dynamiske beregninger av konstruksjoner utsatt for eksplosjoner. Risiko knyttet til eksplosjoner, blir heller redusert ved å satse på å forhindre at det skjer, og unngå at eksplosjonsfarlige områder lukkes inne. Ekspløsjon i friluft kan selvsagt også gjøre skade, men i langt mindre grad enn i et lukket rom.

**Kranoperasjoner** utføres ofte i forbindelse med feltutbygging til havs. En tung last som henger i en wire, vil være et dynamisk system der wiren blir fjæra som massen henger i. En wire er jo normalt ganske stiv, men når den blir lang nok, får den en betydelig elastisitet. Dersom kranen står på et skip som beveger seg i bølger, kan bevegelsene forsterkes slik at lasta får større bevegelser enn skipet. Dette er spesielt viktig ved installasjon av bunninstallasjoner for olje- og gassproduksjon på store vandyp.

I det følgende vil det bli gitt en kort diskusjon omkring bølgers virkning på skip og utvalgte marine konstruksjoner.

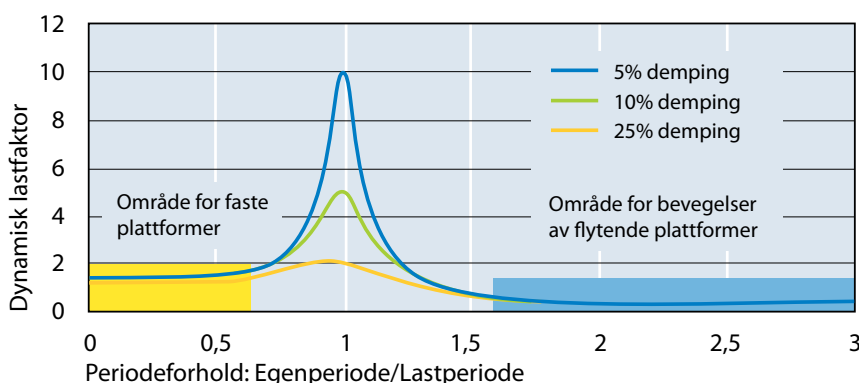


# Dynamisk respons

## Dynamisk respons for faste plattformer

Demping i stål- og betongkonstruksjoner er normalt under 5%. Vi vet at disse konstruksjonene vil bli utsatt for store bølgekrefter. Dette betyr at disse konstruksjonene må unngå resonans i frekvensområdet der bølgekreftene er store. I praksis betyr det at egenperiodene må være kortere enn 4-5 sekunder.

Vi skal ikke gå inn på hvordan egenperioder for faste plattformer kan beregnes. Vi nøyer oss med å slå fast at dersom en plattform forlenges uten at konstruksjonen forsterkes, vil egenperioden øke proporsjonalt med kvadratet av lengden. Økt vanddyb betyr derfor at konstruksjonen må få en betydelig forsterking. Dette vil bli kostbart, noe som gjør at flytende produksjonsanlegg blir foretrukket på store dyp. På Trollfeltet er vanddypet 330 meter. Betongplattformen som står der, er den største på norsk sokkel, og det vil nok aldri bli installert en fast plattform på dypere vann enn dette hos oss. Trollplattformen har en egenperiode på omlag 4 sekunder og er altså på grensen for hva som kan godtas.



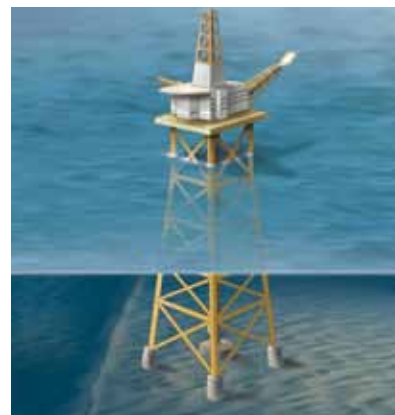
## Dynamiske lastfaktorer for faste og flytende marine konstruksjoner

### Bevegelse av flytende konstruksjoner

For faste plattformer er det altså viktig at egenperioden er kort. For bevegelsene av en forankret, flytende plattform er det viktig at egenperioden er lang. Slike plattformer legger seg altså på motsatt side av resonanstoppen. Egenperiodene skal gjerne være lengre enn 25 sekunder, og dersom periodene er kortere, er det viktig å dokumentere at dempingen er tilstrekkelig høy til å hindre at bevegelsene blir for store.

Egenperiodene for flytere er dels bestemt av forankringssystemet (se side 10-16) og delvis av flyterens form og størrelse. Formen spiller også en stor rolle for demping og for hvor store bølgekreftene vil bli. Dempingen av slike bevegelser er langt større enn for faste konstruksjoner.

Vindkrefter vil variere og kan ha i seg perioder i det samme området som egenperiodene for bevegelser. Resonans vil derfor kunne oppstå, men dempingen øker vesentlig med bevegelsens amplitude, noe som gjør at bevegelsene likevel blir akseptable.



**Stålunderstell for bunnfast plattform.** Bunnfaste plattformer kan også være bygget i betong, se side 10-13 (Statfjord A og Troll).

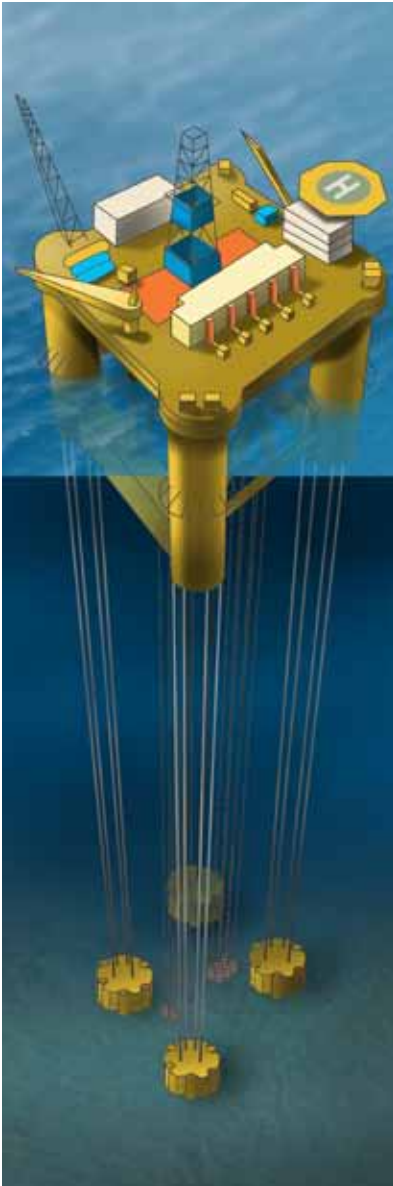


**Flytende marine konstruksjoner** som brukes i olje/gass-utvinningen, kan være enten spesialskip som ovenfor, eller flytende plattformer av ulike typer, se sidene 10-14/15. Der kan du lese mer om disse.



### Vi undrer oss på:

Hvordan kan vi lage petroleumsplattformer som skal stå i områder med is og isfjell?



### **Strekkestagplattform**

Plattformen holdes på plass av 16 strekkstag. Disse er utformet som stålrør med en diameter på 0,82 m. Stagene er montert med en samlet forspenning på 250 MN som drar plattformen så mye ned i sjøen at den får en oppdrift på totalt 1100 MN, se oppgave 10.1. Strekkstagplattformer kalles på engelsk "Tension Leg Platform".

## **Dynamisk respons for strekkstagplattformer**

Strekkestagplattformen er en spesiell plattformtype som benyttes på store dyp. På norsk sokkel har vi Snorre- og Heidrun-plattformene av denne typen. De to plattformene ligger begge på ca. 350 meters vanddyb i henholdsvis Nordsjøen (Tampen-feltet) og Norskehavet (Haltenbanken). Snorre er en stålplattform, mens Heidrun er bygget i betong (se side 4-7).

Plattformtypen karakteriseres ved at den har et overskudd av oppdrift og er forankret til havbunnen med vertikale strekkstag. Disse utbalanserer oppdriftsoverskuddet og er helt kritiske komponenter for å ivareta plattformens sikkerhet. Ryker et slikt stag vil det kunne bety katastrofe, noe som skjedde i Den meksikanske Golf under orkanen Rita i 2005. De norske plattformene er imidlertid konstruert etter andre regler enn de amerikanske, noe som gjør dem sikrere i forhold til en slik hendelse.

Dynamiske egenskaper er helt sentrale for design av denne plattformtypen. Bevegelsene i bølgenes retning (jaging) minner om en omvendt pendelbevegelse. Kraftene i strekkstagene vil ikke øke vesentlig når horisontale krefter fra vind, strøm og bølger skyver på plattformen. Men stagene blir skråstilt når plattformen skyves horisontalt. Da blir det horisontalkomponenter av stagkraftene som gir tilbakeføringskrefter. Egenperioden må følge de samme regler som for flytende plattformer. Her gjelder det altså å få perioden lang nok til å unngå resonans med bølgekreftene, noe som ikke byr på problemer når bare vanddypet er stort nok.

Vertikale bevegelser (hiv) fører til strekkøkning i stagene og må tilfredsstille samme krav til egenperioden som vi kjenner for faste plattformer: Egenperioden må ikke bli særlig lengre enn 4 sekunder for å unngå skadelig resonans. Plattformens masse og egenskapene til strekkstagene bestemmer egenperioden. Dersom stagene blir lange, vil deres stivhet bli redusert, og egenperioden vil øke med mindre stagenes tverrsnitt økes. Dette vil begrense bruken av denne plattformtypen på de virkelig store dypene. Magnolia-plattformen i Den meksikanske Golf står på 1450 meters vanddyb, noe som ser ut til å være det største dyp denne plattformtypen kan tåle.



### **Vi undrer oss på:**

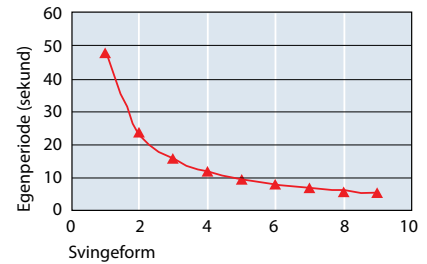
Hvordan er det mulig å installere en strekkstagplattform?

## Dynamisk respons for slanke marine konstruksjoner

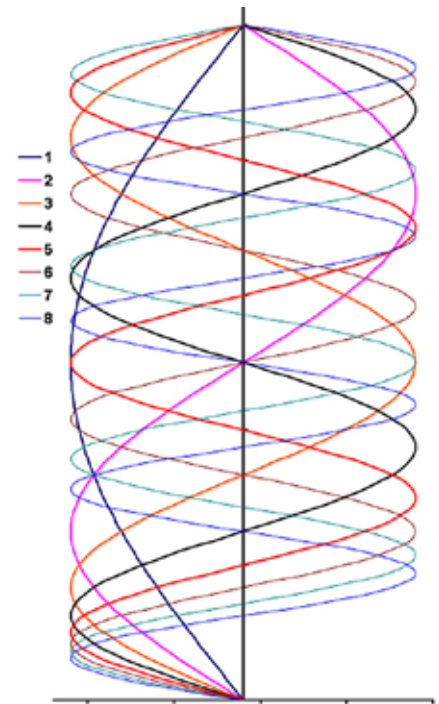
**Mange anvendelser.** Slanke marine konstruksjoner omfatter stigerør, strekkstag, rørledninger under utlegging og i frie spenn, og andre lignende konstruksjonselement. Det som karakteriserer disse, er at de vil ha mange egenperioder som kan komme i resonans, og at det faktisk er umulig å unngå dette. Men store amplituder vil gi stor demping, noe som vil begrense svingningene. Kunnskap om dynamikk er imidlertid viktig for å kunne dimensjonere riktig, og for å kunne forsikre seg om at skadelig utmatting ikke vil forekomme.

**Bølgekrefter og demping i vann er viktig.** Figurene til høyre viser typiske egenperioder og egensvingeformer for et borestigerør på 2000 meters vandndyp. Borestrengen, som selv er et rør, ligger inne i stigerøret. Boreslam går ned gjennom borestrengen og tilbake til plattformen i stigerøret. Stigerøret har mange egenperioder, og hver periode er knyttet til en svingeform. Den lengste egenperioden er nesten 50 sekunder og er knyttet til svingeformen som bare har en bue over hele rørets lengde. Perioden er så lang at denne svingeformen ikke kan komme i resonans med krefter fra store bølger. Men fra figuren ser vi at det er flere egenperioder mellom 20 og 5 sekunder. Egensvingeformer som er knyttet til disse periodene, vil dermed kunne få resonans. Det som hindrer skadelige svingninger i slike rør, er demping fra vannet på større dyp enn der bølgekreftene virker. Dette betyr at man må gjøre dynamiske analyser av slike rør for å undersøke om dynamisk respons kan skade røret. I slike analyser er det viktig å kunne beskrive både bølgekrefter og demping i vann nøyaktig.

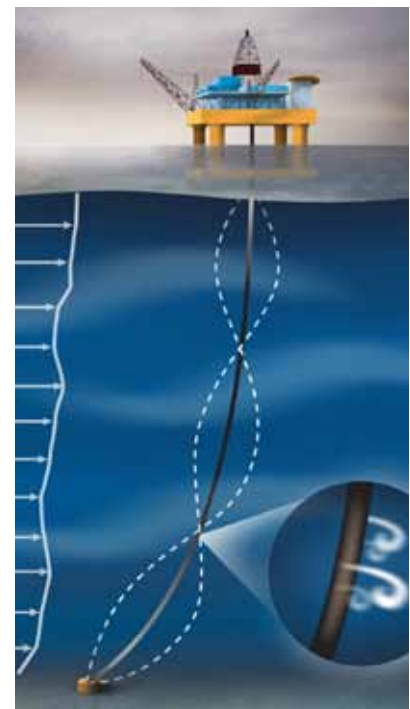
**Virvelavløsning.** En tredje kilde til dynamisk respons i slanke marine konstruksjoner er krefter fra virvelavløsning som følge av havstrømmer. Dette er en spesiell responstype som er selvbegrensende – amplituden blir sjelden større enn én diameter. Det spesielle med slike svingninger er at frekvensen øker når strømhastigheten øker, slik at den svingeformen som oppstår også vil forandres. Spenningene vil normalt ikke bli store, men det kan likevel oppstå utmattingskade. Alle stigerør på flytende produksjonsanlegg må derfor analyseres for å sjekke at de tilfredstiller krav til utmatting. Et tiltak for å begrense utmattingskade er å montere spiralformete spoilere på røret. Dette er imidlertid kostbart, og man vil derfor gjerne unngå bruken av slike spoilere.



**Eigenperioder for stigerør på 2000 m vandndyp**



**Svingeformer for langt stigerør**



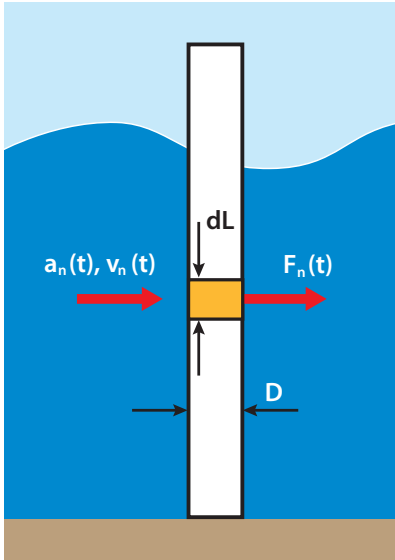
**Virvelavløsning**



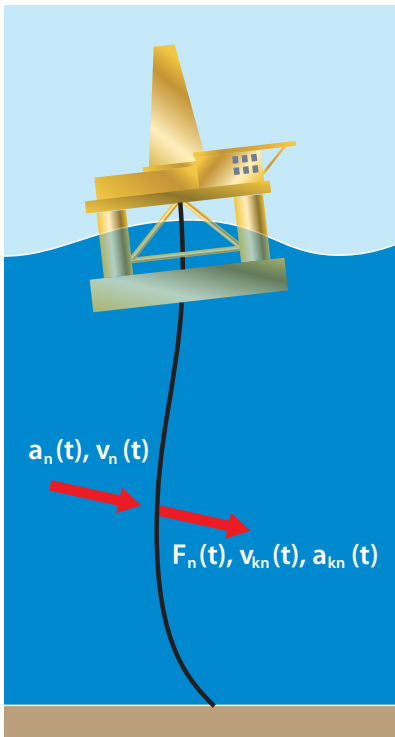
### Vi undrer oss på:

Blås opp en lang, slank ballong. Hold den fast i en ende, og beveg den i en lang bue med utstrakt arm. Kanskje den vibrerer? Hva skjer?

# Krefter fra bølger



**Fast pel på havbunnen**



**Stigerør for boring fra flytende plattform**

Det er ofte vanskelig å beregne krefter fra bølger på en konstruksjon. Dette har sammenheng med at konstruksjonen vil påvirke bølgen slik at det ikke er tilstrekkelig å kunne beregne vannets bevegelser i en uforstyrret bølge, slik det er beskrevet i kapittel 1. Men dersom konstruksjonen er liten i forhold til bølgelengden, kan vi anta at den ikke påvirker bølgen nevneverdig. Da kan vi benytte den såkalte Morisons ligning til å beregne krefter. Vi skal se nærmere på hvordan vi gjør dette for en fast pel som står på havbunnen.

## Krefter på en fast pel på havbunnen

Pelen er vist på figur i margen. Den er loddrett og har konstant diameter  $D$ . Den er så stiv at vi kan anta at den ikke beveger seg når den utsettes for bølgekrefter. Diameteren er om lag  $1/6$  av bølgelengden, og dette gjør at vi kan benytte Morisons ligning. Generelt vises til side 1-18 når det gjelder bølgebevegelser av vannet. Bølgen gir horisontal hastighet  $v_n$  og akselerasjon  $a_n$  i et tidspunkt  $t$ . Vannbevegelser langs pelen gir ikke krefter av betydning. Ser vi på en del av pelen med lengde  $dL$ , kan vi finne kreftene i dette tidspunktet med formelen:

$$F_n(t) = \left[ \frac{1}{2} \rho C_D D v_n(t) |v_n(t)| + \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} a_n(t) \right] dL$$

Her er  $\rho$  vannets tetthet [ $\text{kg/m}^3$ ]. Merk at krafta som skapes av vannets hastighet, øker med kvadratet av hastigheten og er proporsjonalt med det projiserte arealet  $D \cdot dL$ , mens krafta fra akselerasjonen er proporsjonal med akselerasjonen og pelens volum. De to krafttypene kalles ofte henholdsvis dragkraft og volumkraft.  $C_D$  er den samme størrelsen som vi beskrev på side 3-9. Den er om lag 0,8 for en sirkulær sylinder i typiske vannhastigheter.  $C_M$  kalles massekoeffisienten og er om lag 2,0 for en sirkulær sylinder.

## Krefter på stigerør

Nederste figur viser et stigerør som vil få store bevegelser fra bølgekrefter og som følge av plattformens bevegelser. I dette tilfellet må vi ta hensyn til både bølgeinduserte vannbevegelser og rørets bevegelser. Det vil føre for langt å gå nærmere inn på slike beregninger.

## Eksempel 5.6. Beregning av krefter på en vertikal pel

Ta utgangspunkt i øverste figur og data i margen på neste side, og beregn og besvar følgende:

- Amplitudene for akselerasjon og hastighet på aktuelt punkt på pelen
- Amplitudene for dragkrafta og volumkrafta
- Tegn opp tidsfunksjonene, og bestem største totale kraft



Benytter vi lineær bølgeteori for dypt vann sammen med Morisons ligning, får vi:

Hastighet på dybde  $z$ , tidspunkt  $t$ :

$$v(z, t) = \frac{H}{2} \frac{2\pi}{T} e^{-\frac{\omega^2}{g} z} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Akselerasjon på dybde  $z$ , tidspunkt  $t$ :

$$a(z, t) = \frac{H}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 e^{-\frac{\omega^2}{g} z} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$T$  er bølgens periode,  $H$  er bølgehøyden og  $g$  er tyngdens akselerasjon.

Dragkraft på element med diameter  $D$  og lengde  $dL$ :

$$F_D(t) = \frac{1}{2} \rho \cdot C_D \cdot D \cdot dL \cdot v(z, t) \cdot |v(z, t)|$$

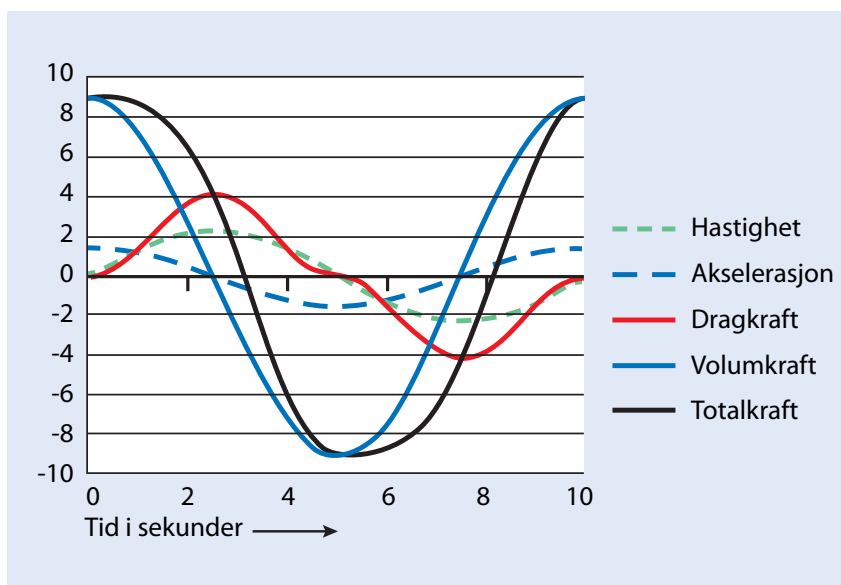
Volumkraft på element med diameter  $D$  og lengde  $dL$ :

$$F_V(t) = \rho \cdot C_M \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot dL \cdot a(z, t)$$

$\rho$  er vannets tetthet,  $C_D$  er dragkoeffisienten og  $C_M$  er massekoeffisienten. Setter vi inn aktuelle verdier, finner vi ved hjelp av et dataprogram:

- Hastighetsamplitude: I overflaten: 3,14 m/s, på 8 meters dyp: 2,28 m/s
- Akselerasjonsamplitude: I overflaten: 1,97 m/s<sup>2</sup>, på 8 meters dyp: 1,43 m/s<sup>2</sup>
- Amplitude for dragkraft: 4,147 kN
- Amplitude volumkraft: 8,989 kN

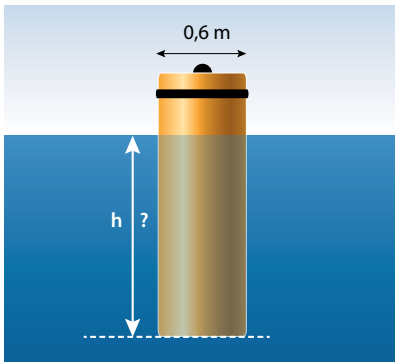
Tidshistoriene for hastighet, akselerasjon, de to kraftkomponentene og total kraft er vist på figuren. Merk at dragkraften ikke er en harmonisk funksjon fordi hastigheten inngår med leddet  $v(t) \cdot |v(t)|$ .



**Data for eksempel 5.6**

- Pelens diameter: 3 meter
- Bølgens periode: 10 sekunder
- Bølgens amplitude: 5 meter
- Vannndyp til segmentets midtpunkt: 8 meter
- Lengde av segment: 1 meter
- Vannets tetthet: 1000 kg/m<sup>3</sup>
- Dragkoeffisient  $C_D$ : 0,8
- Massekoeffisient  $C_M$ : 2,0

# Oppgaver

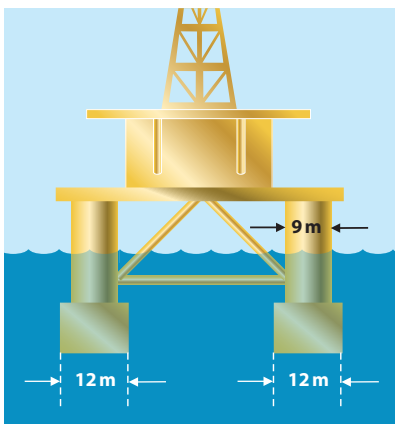


**Oppgave 5.1**

**Oppgave 5.1**

En sylindrisk bøye for registrering av bølgehøyder flyter i sjøen. Den har en masse lik 800 kg som har blitt fordelt slik at bøyen holder seg stabilt i opprett stilling. Diameter: 0,6 m. Tetthet lik 1025 kg/m<sup>3</sup>.

- a) Beregn hvor dypt bøyen flyter under statiske forhold
- b) Beregn egenperioden for bøyens frie, vertikale bevegelser (hiv) når den ligger og "dupper" etter passering av en enkeltbølge.



**Oppgave 5.2**

**Oppgave 5.2**

En halvt nedsenkbar plattform for leteboring er utført som vist i figur på side 2-24. Mellom pongtongene og dekket er det 6 rørsøyler med diameter 9 m. Plattformen har en total masse på 29000 tonn. I tillegg kommer en hydrodynamisk masse som for hiv kan settes til 12 000 tonn.

- a) Beregn egenperioden for frie, vertikale svingninger (hivbevegelser)

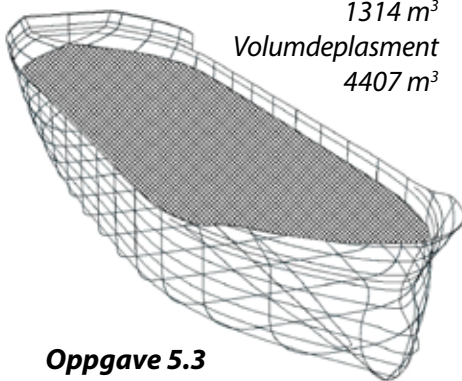
**Oppgave 5.3**

a) Vis at den vanlige ligningen for beregning av svingningers egenperiode  $T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$  kan omskrives til følgende ligning for flytende legemers frie, vertikale svingninger i vannet (hiv):

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{A_{vl} \cdot \rho \cdot g}}$$

- b) Det vises til utskrift fra dataprogrammet "Freeship" på side 2-17 for et skip med volumdeplasement 4407 m<sup>3</sup> i saltvann. Vannlinjearealet for dette skipet er beregnet til 1314 m<sup>2</sup>. Bestem egenperioden for frie, vertikale svingninger for skipet (hiv-bevegelser)

Vannlinjeareal  
1314 m<sup>2</sup>  
Volumdeplasement  
4407 m<sup>3</sup>



**Oppgave 5.3**

**Oppgave 5.4**

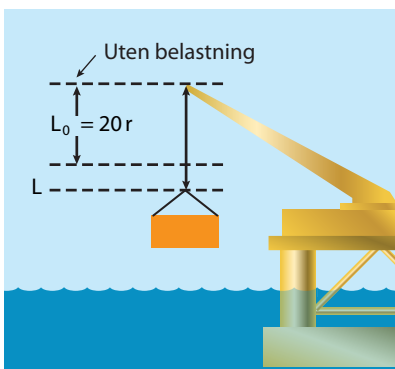
En bunnramme med masse 12 tonn skal løftes fra en lekter før den installeres på havbunnen. I en periode blir den da hengende i en stålkabel med opprinnelig lengde 20 m og diameter 25 mm. Stålet har en elastisitetsmodul lik 207 GPa. Les mer om styrkeegenskaper til stål på sidene 4-10/11/12. Beregn:

- a) Strekkspenning, tøyning og forlengelse i kabelen.
- b) "Fjærstivheten" og egenfrekvensen for systemet

**Oppgave 5.5**

Det vises til oppgave 5.4. Bunnrammen, som altså har en masse på 12 tonn, skal senkes ned til havbunnen med den samme stålkabelen slik at den blir 400 m lang. I denne tilstanden må vi ta hensyn til tre forhold når vi skal beregne krefter og bevegelser:

- Stålkabelen vil bidra med tyngde når vi skal beregne krafta i kabelen
- Oppdrift vil redusere krafta i kabelen, og beregnes på vanlig måte.
- Massen til modulen får et bidrag fra vannet. Dette bidraget kalles "hydrodynamisk masse". I dette eksemplet kan vi anta at denne massen er den samme for vertikal- og horisontalbevegelser og er gitt av massen til fortrent vannmengde.



**Oppgave 5.4**

- a) Beregn statisk kraft i stålkabelens øvre og nedre ende
- b) Beregn total masse for modulen, egenperioden og egenfrekvens for modulens vertikale bevegelse. Du skal da ikke ta med massen til kabelen. Volumet av modulen settes til 3 m<sup>3</sup>.

**Oppgave 5.6**

Den generelle formelen for egenperioden for en svingning er som kjent  $T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}$ , er stivheten. Fjærkrafta kalles gjerne "tilbakeføringskrafta" og kan beregnes ut fra  $F_x = k \cdot s$ , der s er utslaget. For en pendel kan vi bestemme stivheten ved å beregne tilbakeføringskrafta for et lite utslag s, se figur til høyre.

Når massen til pendelen er m, må den vertikale komponenten av snorkrafta være  $m \cdot g$ . Tilbakeføringskrafta  $F_x$  må da bli  $m \cdot g \cdot t_{ga}$ . For små vinkler vil tangens og sinus til en vinkel være det samme som vinkelen selv i radianer. Vi kan derfor bestemme  $F_x$  ved ligninga

$$F_x = \frac{m \cdot g \cdot s}{L}$$

Dette betyr at stivheten k kan bestemmes som  $k = m \cdot g / L$ . Egenperioden blir da

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{m \cdot g / L}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ (luft)}$$

Dette betyr at pendelens egenperiode i luft er bestemt av snoras lengde og tyngdens akselerasjon, men er uavhengig av pendelens masse.

Når pendelen henger i vann, må utledningen av ligninga for egenperioden ta hensyn til at snorkrafta påvirkes av oppdrifta, og at pendelens masse får et bidrag fra hydrodynamisk masse. Da kan du ikke forkorte slik det ble gjort ovenfor.

- a) Finn bunnrammens egenperiode for eventuell pendelutslag når den henger i vann og kabelen er 400 m lang

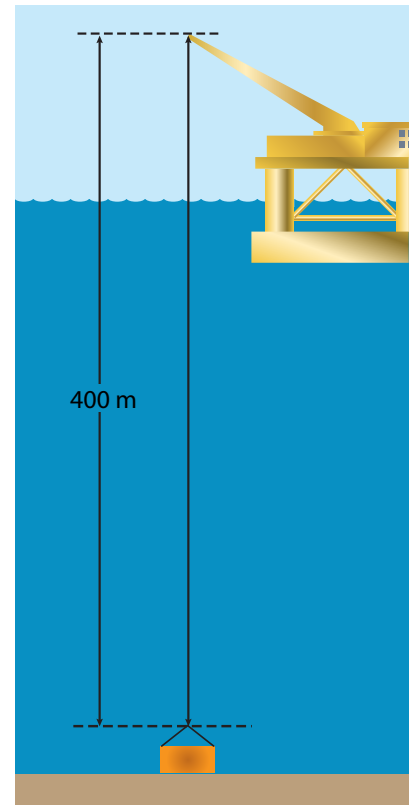
**Oppgave 5.7** (kan kanskje være vanskelig, men tas med for å vise interesserte elever eksempel på anvendelse av matematikk og fysikk) Du skal finne fram til hvilke løsninger ligning 5.12 har, altså finne fram til hvilke funksjoner,  $s_{dyn}(t)$ , som passer i ligninga:

$$-k \cdot s(t) = m \cdot a(t) \tag{5.12}$$

Her har vi for enkelhets skyld skrevet  $s(t)$  i stedet for  $s_{dyn}(t)$ . Samtidig skal du også påvise at ligning 5.13 for bestemmelse av egenperioden er riktig.

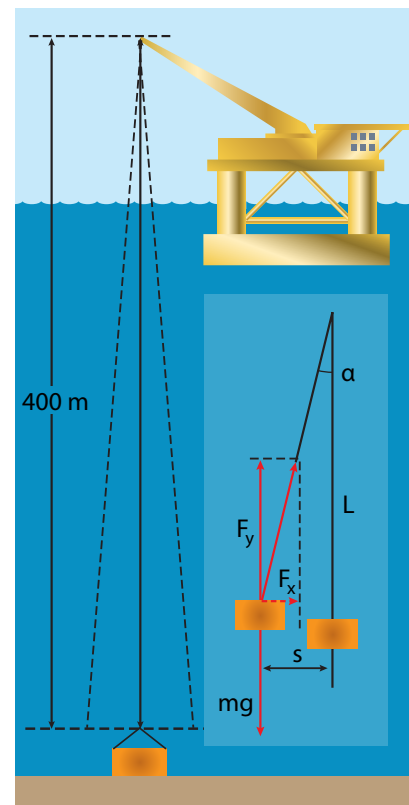
$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5.13}$$

Siden begge deler er "på kanten" av hva som bør tas med av stoff i denne boka, har vi nedenfor beskrevet, trinn for trinn, hvordan du skal gå fram på enkleste måte.



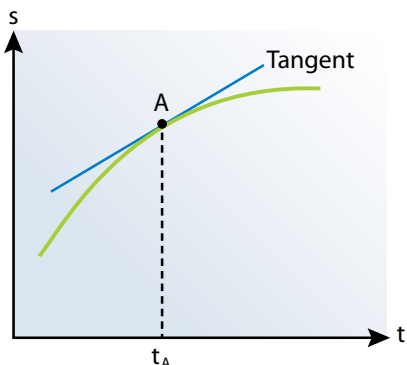
**Oppgave 5.5**

Vi regner med at kabelen i sin helhet henger i vann



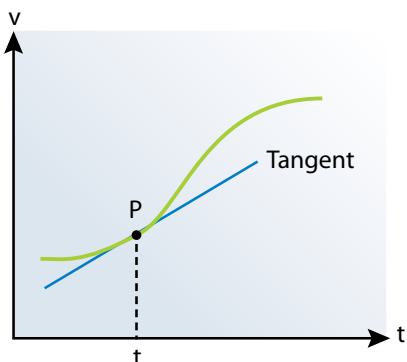
**Oppgave 5.6**

# Oppgaver



**Veigraf for bevegelse der farten varierer. Fra ERGO Fysikk 2**  
Momentanfarten  $v$  ved tidspunktet  $t_A$  er lik stigningstallet for tangenten i punkt A. Momentanfarten blir altså:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$



**Fartsgraf for en gjenstand med varierende akselerasjon. Fra ERGO Fysikk 2**  
Akselerasjonen er stigningstallet til tangenten. Momentanakselerasjonen blir:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$$

a) Aller først skal vi repetere fra fysikken (for eksempel fra ERGO Fysikk 2) hvordan vi kan bestemme fart og akselerasjon for en forskyving hvor funksjonen for denne er kjent, se figurer til høyre.

$$\text{Momentanfart : } v = \lim ds/dt = s'(t) \text{ når } dt \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

$$\text{Momentanakselerasjon } a = \lim dv/dt = v'(t) = s''(t) \quad (5.25)$$

Vi kan altså finne fart og akselerasjon i et hvilket som helst tidspunkt ( $t$ ) ved å bestemme henholdsvis den førstederiverte og den andrederiverte av veifunksjonen med hensyn til tiden, og så sette inn aktuelle verdier for  $t$ . Vis hvordan dette kan brukes til å omforme (5.12) til følgende form, som ofte kalles svingeligningen:

$$s''(t) + \frac{k}{m} s(t) = 0 \quad (5.26)$$

b) En slik ligning kaller vi en differensialligning av annen orden. Å løse en slik ligning høres kanskje vanskelig ut. Dette ligger utenfor matematikkpensumet i videregående skoler, men vi kan også bruke sunn fornuft. I dette tilfellet skjønner vi nemlig at funksjonen  $s(t)$  må være periodisk og derfor i utgangspunktet være basert på en sinusfunksjon eller en cosinusfunksjon (eller en sum av disse). Ved å derivere to ganger vil nemlig de samme funksjonene da komme tilbake, men da med motsatt fortegn. Dermed skulle det bli mulig at summen av selve funksjonen  $s(t)$  og den andrederiverte  $s''(t)$  kunne bli lik null, slik som ligning 5.26 krever. Vi prøver oss med følgende funksjon:

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (5.27)$$

Du skal nå påvise (ved å derivere to ganger) at følgende verdier passer i hovedligningen 5.26 (husk kjerneregelen):

$$A = s_0 \text{ (startforskyvningen, når } t \text{ settes lik null)}$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Vis ved dimensjonsanalyse at  $\omega$  må ha dimensjonen  $1/s$  og altså, matematisk sett, må være en vinkelhastighet (radianer/s). Det forutsettes at startfarten  $v(0)$  er lik 0. Hvis det ikke er tilfelle, må løsningen (5.27) utvides med et ledd  $B \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

c) Påvis at egenperioden for en svingning kan finnes av ligningen

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

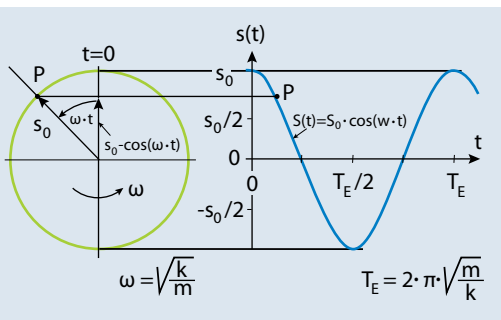
Hermed har du nå bevist at svingeligningen 5.26 har følgende løsning:

$$s(t) = s_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \quad (5.28)$$

og at egenperioden for en svingning er

$$T_E = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Her er  $k$ = fjærstivhet [N/m] og  $\omega$  = vinkelhastighet [rad/s].



**Generering av graf for svingeligning**

**Oppgave 5.8**

Det vises til oppgave 5.2 og de data som der er oppgitt for en flytende boreplattform. Vi forutsetter at denne oppgaven allerede er løst. Hvis ikke, må du gjøre det nå. Etter at plattformen har blitt slept fram til et nytt borested, har den kommet i hivsvingninger. Før plattformen er blitt ankret opp på det nye stedet, kan vi betrakte disse som frie, udempede svingninger. Vi setter amplituden lik 1,0 m ved  $t = 0$ .

- a) Bestem den vinkelhastigheten  $w$  som kan knyttes til svingningene
- b) Bestem funksjonen  $s(t)$ , og tegn opp en graf som viser hvordan utslagene varierer for den første egenperioden
- c) Bestem funksjonen  $v(t)$ , og tegn opp tilhørende graf for hastigheten til svingebevegelsen i denne perioden
- d) Bestem funksjonen  $a(t)$ , og tegn opp grafen for akselerasjonene under svingebevegelsen



## Referanser

- 5.1 Carl Martin Larsen. Marin dynamikk. Kompendium i fag 4183, Masterprogram i marin teknikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi, Institutt for marin teknikk. Trondheim, 2012